# MA2: Session 2 Math L1 MASS du 24/6/2014, 8h30-11h30, 13E

*Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits et doivent être rangés.*

**Exercice I:**

Dans cet exercice on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) On considère l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + 2z, -x + y - 2z, -2x + 2y - 3z)$$

Donnez la matrice $A$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.

2) a) Donnez une base du noyau de $f$.

b) Donnez une équation de l'image de $f$.

3) On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = -2e_1 + e_3$.

a) Montrez que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Quelle est la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?

4) a) Calculez $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de $u_1, u_2, u_3$.

b) Quelle est la matrice $C = Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.

5) Calculez $P^{-1}$.

**Exercice II:**

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $v_1, v_2$ est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

2) On considère une application linéaire $s$ de matrice dans la base $\mathcal{B}'$:

$$Mat(s, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donnez la matrice de $s$ dans la base canonique (au départ et à l'arrivée).

**Exercice III:**

1) a) Donnez le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$f(x) = 4 - 4\sqrt{\cos x}$$

b) Donnez le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$g(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x + x^2} + x^3.$$

c) Etudiez le signe de $f - g$ au voisinage de $x = 0$.

**Exercice IV:**

1) Calculez

$$\int_0^1 e^x \cdot (x + 1) \cdot dx$$

2) Calculez avec un changement de variable trigonométrique:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

**Exercice V:**

On considère des réels $a, b$ et la courbe paramétré $\Gamma : \ ]-\infty, 1[ \to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-1)^3 + 2 + a \cdot t + t^5 \\ t - \sin(t) \cdot (1 + b \cdot t) \end{pmatrix}$$

1) Pour quelle valeur de $a$ la courbe $\Gamma$ a t'elle un point stationnaire (critique) en $t = 0$.

2) On considère maintenant le cas $a = 1$. Existe t'il une valeur de $b$ telle que la courbe ait un point d'inflexion en $t = 0$?

3) a) On étudie maintenant le cas $a = -3$ et $b = 1$. Quelle est la nature de $\Gamma$ autour de $t = 0$?

b) Si $a = -3$, existe t'il une valeur de $b$ telle que $\Gamma$ ait un rebroussement de seconde espèce en $t = 0$? (si oui laquelle)

**Exercice VI:**

1) Donnez une primitive de:

$$F = \frac{x-1}{x^2+2}$$

2) a) Dans cette question on ne demande PAS les valeurs des coefficients ne perdez donc pas de temps à les calculer. Donnez la forme de la décomposition en éléments simples de:

$$Q = \frac{x^8 + 2}{x^3 \cdot (x-1) \cdot (x^2+2)^2}$$

b) Quelle est la partie entière de $Q$?

c) Calculez un autre coefficient de cette décomposition. (celui qui vous semble le plus simple à obtenir)